

Métodos para el análisis de la estabilidad de pendientes

Jaime Bojorque Iñiguez

Facultad de Ingeniería, Universidad de Cuenca, Av. 12 de Abril s/n, Cuenca, Ecuador

Autor para correspondencia: jaime.bojorque@ucuenca.edu.ec

Fecha de recepción: 14 de agosto de 2011 - Fecha de aceptación: 20 de diciembre de 2011

RESUMEN

En este documento se presentan, de una manera concisa, los diferentes métodos que han sido desarrollados para el análisis de la estabilidad de pendientes. Estos métodos son comparados desde el punto de vista de los supuestos que cada uno de estos realizan para resolver el problema. Entre los métodos más utilizados están los Métodos de Equilibrio Límite con sus variantes, el Método de Análisis Límite basado en los teoremas del límite-inferior y límite superior, y los Métodos Numéricos poniendo énfasis en el método de los Elementos Finitos, en el cual se emplea la técnica de reducción de la resistencia del suelo. El presente documento presenta adicionalmente una compilación de referencias bibliográficas para cada método, que puede formar la base de partida para una mejora de cada metodología empleada en el análisis de la estabilidad de pendientes.

Palabras clave: Estabilidad de pendientes, equilibrio límite, análisis límite, elementos finitos.

ABSTRACT

This document presents, in a concise manner, different methods that have been developed for slope stability analysis. These methods are compared from the point of view of the assumptions that each of these methods uses to solve the problem. Among the most used methods are: the Limit Equilibrium Method with its variants, the Limit Analysis Method based on the theorems of the lower-bound and upper-bound, and the Numerical Methods with emphasis on the Finite Element Method, which uses the soil strength reduction technique. This document also presents a compilation of references for each method, which may form the starting point for further improvement of each methodology used in slope stability analysis.

Keywords: Slope stability analysis, limit equilibrium, limit analysis, finite element method.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la estabilidad de las pendientes es, y continuará siendo, un tema muy importante en la ingeniería geotécnica. Casi todos los proyectos de ingeniería que se construyen tienen relación, en menor o mayor medida, con el análisis de la estabilidad de las pendientes ya sean estas naturales o construidas por el hombre. Por ejemplo, los proyectos de construcción de carreteras, túneles, presas, edificaciones en pendientes, entre otros, involucran una investigación de la estabilidad de los suelos. El término “pendientes” empleado en este documento abarca tanto a las laderas (pendientes naturales) como los taludes (pendientes construidas por el hombre). La discusión en este documento se enfoca en los métodos empleados para el análisis de la estabilidad de pendientes en suelos o macizos rocosos que se comporten como tales (macizos que por sus características geomecánicas se los puede considerar como suelos). Así también, el término “deslizamiento” en el presente documento abarca todo tipo de movimiento de masas pendiente abajo, ya sean de roca, detritos, o suelos (Fell y col., 2008).

El número de deslizamientos producidos a nivel mundial ha ido en aumento, incrementando el número de damnificados y fatalidades. El incremento de la actividad de los deslizamientos se lo puede atribuir a una falta de entendimiento en los procesos internos y externos que intervienen en estas inestabilidades. Aparte de estos procesos, otras causas de dicho incremento son: la deforestación, expansión de la frontera urbana, construcción de carreteras y otras infraestructuras en áreas propensas a deslizamientos, y un incremento de las precipitaciones causado, posiblemente, por el cambio en el patrón climático (Schuster, 1996). Muy aparte de la invaluable pérdida de vidas humanas, los deslizamientos causan severos impactos ambientales y socio-económicos. El caso de La Josefina en 1993, en la Provincia del Azuay, Ecuador, produjo un estimado en pérdidas económicas directas de más de 147 millones de US dólares. Más aún, se deben considerar los grandes costos indirectos que este deslizamiento causó, debido al impacto que ocasionó para la generación hidroeléctrica del Ecuador, pues, en ese entonces, la represa localizada aguas abajo del deslizamiento proporcionaba más del 65% de la energía del país (Canuti y col., 1994; Plaza-Nieto y Zevallos, 1994). Datos existentes sobre los eventos de deslizamientos a nivel mundial, indicando las fatalidades y costos estimados, entre otros factores, se los pueden obtener de la basededatos elaborada por el Centro de Investigación de Desastres Epidemiológicos (Centre for Research on the Epidemiology of Disasters-CRED) (EM-DAT, 2008). Esta base de datos contiene información general de desastres naturales como inundaciones, erupciones volcánicas, movimientos de masas, terremotos, entre otras catástrofes naturales.

La importancia del análisis de la estabilidad de pendientes debe ser orientada, enfocando esfuerzos a entender los procesos que controlan la iniciación, desarrollo y desencadenamiento de inestabilidades en las laderas y taludes. En base de la bibliografía especializada, se puede distinguir tres modelos conceptuales aplicables para el análisis de la estabilidad de pendientes. El primer enfoque, y el más difundido, es el Método de Equilibrio Límite (Limit Equilibrium Method), en donde diferentes técnicas han sido desarrolladas, las cuales se diferencian la una de la otra, básicamente, en el número y tipo de ecuaciones de equilibrio que emplean y en los supuestos incluidos en las fuerzas interdovelas (interslice forces). Un segundo grupo son los Métodos de Análisis Límite (Limit Analysis Method) donde los teoremas del Límite-Inferior y Límite-Superior son empleados. El tercer grupo y de interés creciente, son los Métodos Numéricos, dentro de los cuales, los más difundidos son el Método de Elementos Finitos (Finite Element Method) y el Método de Diferencias Finitas (Finite Difference Method). Estos métodos numéricos cumplen con los requerimientos teóricos para obtener la solución completa; es decir, aquella que se obtiene en base del sistema de ecuación de equilibrio, compatibilidad, leyes constitutivas, y condiciones de frontera.

Este artículo presenta, de manera general, estos métodos para el análisis de la estabilidad de pendientes y en manera específica, el método basado en elementos finitos con la técnica de “reducción de la resistencia al corte”.

2. MÉTODOS DE ANÁLISIS

Para determinar la solución de problemas geotécnicos, diferentes métodos de análisis están disponibles. Los métodos existentes pueden ser agrupados en tres clases generales (Huybrechts, 2005): métodos de solución exacta (métodos analíticos), simples y numéricos. Soluciones analíticas pueden ser obtenidas únicamente para problemas geotécnicos simples donde el suelo se considera como un material elástico. En la práctica, debido al comportamiento no-lineal del suelo y a la complejidad de los problemas de ingeniería, soluciones analíticas raramente están disponibles. Esto ha llevado a introducir simplificaciones en el problema para tratarlos adecuadamente. Estas simplificaciones pueden ser implementadas ignorando algunos requerimientos de la solución completa, como es el caso de los métodos de equilibrio límite y análisis límite. Los requerimientos teóricos que deben ser cumplidos para considerar la solución completa son cuatro (Potts y Zdravkovic, 1999): equilibrio, compatibilidad, ley constitutiva y condiciones de borde o frontera. En base a estos cuatro requerimientos, los diferentes métodos de análisis pueden ser comparados.

El equilibrio se compone de dos partes: equilibrio global y equilibrio interno. El equilibrio global se relaciona con resolver las ecuaciones de fuerzas y momentos; mientras que el equilibrio interno está relacionado con encontrar un campo de esfuerzos que satisfaga la ecuación diferencial (modelo matemático). Las ecuaciones de equilibrio se las puede expresar como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho b_x &= \rho \ddot{u}_x \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho b_y &= \rho \ddot{u}_y \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho b_z &= \rho \ddot{u}_z\end{aligned}\quad (1)$$

con σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{xz} y σ_{yz} siendo los componentes cartesianos de los esfuerzos. Estas ecuaciones pueden formularse como:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{U}} \quad (2)$$

donde \mathbf{L}^T representa la transpuesta del operador diferencial, definida por:

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3)$$

El equilibrio, por lo tanto, se relaciona con los esfuerzos ($\boldsymbol{\sigma}$), fuerzas másicas ($\rho \mathbf{b}$) y las fuerzas inerciales ensambladas en el vector $\rho \ddot{\mathbf{U}}$. La densidad se expresa con ρ y el vector de desplazamientos con \mathbf{U} . Un punto encima de la variable, denota diferenciación con respecto al tiempo.

La compatibilidad se asocia con los desplazamientos y deformaciones. Esta característica, en términos generales, expresa que no deben existir separaciones entre partículas del material y que no exista traslape entre partículas del material. Cuando las deformaciones se consideran pequeñas, el requerimiento de compatibilidad se consigue imponiendo que la variación de los desplazamientos cumpla con la siguiente ecuación de deformación:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{U} \quad (4)$$

El vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ ensambla las componentes de deformaciones y se relaciona con la componente de desplazamientos ensamblada en el vector (\mathbf{U}).

La ley constitutiva del material expresa la relación existente entre los esfuerzos y las deformaciones, de ahí que proporciona la correlación entre las ecuaciones de equilibrio y las de compatibilidad. Esta relación, basada en el comportamiento del material, es generalmente expresada mediante la ecuación constitutiva de la forma:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

Debido al comportamiento no lineal del suelo, la ecuación constitutiva se expresa usualmente en base de los incrementos de esfuerzos ($\Delta\sigma$) y de deformaciones ($\Delta\epsilon$), donde el termino **D** es la matriz que contiene las componentes de las propiedades del suelo. Esta relación entre esfuerzos y deformaciones no se considera en el método de equilibrio límite, el cual es un segmento físico importante que se ha ignorado.

Las condiciones de borde definen el tipo de problema geotécnico a ser investigado. Estas condiciones pueden ser: desplazamientos impuestos, cargas estáticas y/o dinámicas aplicadas, procesos de excavación y construcción, o un cambio en la presión de agua de poros, entre los más importantes.

En base a los cuatro requerimientos teóricos, los diferentes métodos para el análisis de la estabilidad de pendientes pueden ser comparados. La Tabla 1 presenta las ecuaciones que satisfacen cada método.

Tabla 1. Requerimientos que satisfacen los diferentes métodos (modificado de Potts, 2003).

Método de análisis	Requerimientos en la solución				
	Equilibrio	Compatibilidad	Ley constitutiva	Condiciones de borde	
				Fuerzas	Desplazamientos
Solución analítica	S	S	Elástico-lineal	S	S
Equilibrio Límite	S	NS	Rígido con criterio de falla	S	NS
Campo Tensorial	S	NS	Rígido con criterio de falla	S	NS
Análisis Límite (Límite-Inferior)	S	NS	Plasticidad perfecta con ley de fluencia asociativa	S	NS
Análisis Límite (Límite-Superior)	NS	S		NS	S
Métodos numéricos	S	S	Cualquiera	S	S

Leyenda: S: satisface, NS: no satisface

La *Solución Analítica* existe para casos muy simples, donde es posible imponer una ley constitutiva y condiciones de borde simples, y aplicar las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. Aunque la solución es exacta desde el punto de vista teórico, sigue siendo una aproximación muy distante del problema geotécnico real. Se tienen que realizar muchas suposiciones en todos los requerimientos para idealizar el modelo matemático. Como ejemplos de estos casos están: los problemas en que el comportamiento del suelo se lo puede considerar como isotrópico y elástico lineal y en donde las condiciones de borde son simples, o cuando las condiciones geométricas de simetría facilitan que el problema pueda ser resuelto en una sola dimensión.

Los métodos se consideran *Simples* cuando incumplen uno o más de los requerimientos teóricos de la solución completa. Los métodos de equilibrio límite, campo de esfuerzos y análisis límite, pertenecen a esta clase. El análisis de cuña de Coulomb (Coulomb, 1776) y las técnicas de dovelas, extensamente empleados en la estabilidad de pendientes, son ejemplos del método de equilibrio límite. La teoría de presión lateral de Rankine (1857) y los coeficientes de capacidad de soporte del suelo, son ejemplos del método de campo de esfuerzos. El análisis límite con los teoremas del límite-inferior y superior pertenecen de igual forma a estos métodos simples. El teorema del límite-superior ignora las ecuaciones de equilibrio, mientras que el del límite-inferior ignora la ecuación de compatibilidad. Es importante mencionar que para el análisis de la estabilidad, los métodos simples necesitan introducir condiciones con respecto al mecanismo de falla. La información que se puede obtener de los diferentes métodos es variable, lo cual debe tenerse muy en cuenta para el diseño de las estructuras en las pendientes analizadas. De los métodos simples, información de la estabilidad, pero no de los desplazamientos o del comportamiento de estructuras adyacentes puede ser obtenida.

El método de elementos finitos y diferencias finitas pertenecen al tipo de *Métodos Numéricos*, donde los cuatro requerimientos de la solución completa se satisfacen. En estos métodos también se

introducen suposiciones pero que no son tan restrictivas como en los métodos anteriores. Las dos principales suposiciones son la discretización del contorno y la estrategia de solución de las no linealidades (geométricas y/o del comportamiento del material). La capacidad que tienen los métodos numéricos de proporcionar condiciones reales depende de la capacidad que tenga el modelo constitutivo de representar el comportamiento real del suelo. Sin embargo, para el análisis de la estabilidad de pendientes modelos constitutivos simples, por ejemplo el de Mohr-Coulomb, proporcionan resultados satisfactorios (Zienkiewicz y col., 1975; Griffiths, 1980).

La información que se puede obtener de cada método para el diseño de estructuras se presenta en la Tabla 2. Los métodos numéricos son los únicos que proporcionan información sobre la estabilidad, desplazamientos y el comportamiento de las estructuras adyacentes.

Tabla 2. Requerimientos de Diseño que satisfacen los diferentes métodos de análisis (modificado de Potts, 2003).

Métodos de análisis	Requerimientos del diseño		
	Estabilidad	Desplazamientos	Estructuras Adyacentes
Solución analítica (elástico lineal)	No	Si	Si
Equilibrio Límite	Si	No	No
Campo Tensorial	Si	No	No
Análisis Límite (Límite-Inferior)	Si	No	No
Análisis Límite (Límite-Superior)	Si	Aproximación	No
Métodos numéricos	Si	Si	Si

Un esquema general sobre los diferentes métodos empleados en el análisis de la estabilidad de pendientes se presenta en la Figura 1, donde se resalta el camino que lleva al análisis por el método de elementos finitos. El problema presentado en la Figura 1 es la estabilidad de pendientes, pero dentro de este esquema puede incluirse cualquier problema geotécnico.

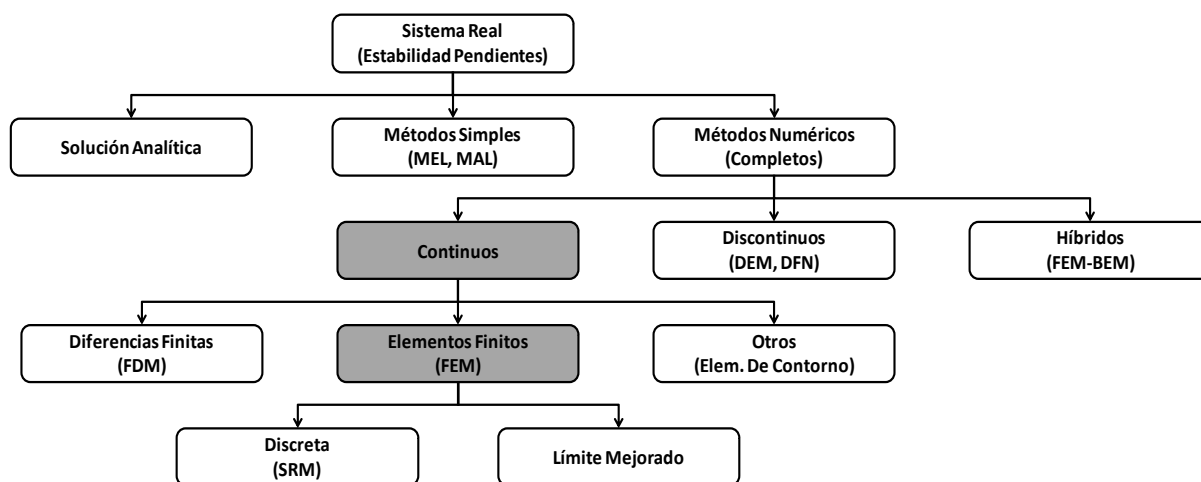


Figura 1. Esquema de los diferentes métodos de análisis para la estabilidad de pendientes.

El problema real es representado por un modelo matemático, este modelo puede ser simple o complejo. Si el modelo matemático es resuelto cumpliendo los cuatro requerimientos teóricos, la solución cae en el análisis numérico. Los métodos numéricos pueden ser continuos (ej., elementos finitos, diferencias finitas), discontinuos (ej., elementos discretos), o híbridos (ej., elementos finitos - elementos de contorno). Naylor (1982) trata el uso de los elementos finitos en la estabilidad de pendientes y distingue dos técnicas: la Directa y la del Límite Mejorado. En las siguientes secciones

se presentan los métodos más empleados en la actualidad para el análisis de la estabilidad de pendientes.

3. EL MÉTODO DE EQUILIBRIO LÍMITE (MEL)

Los métodos precursores del equilibrio límite consideran la masa potencial de falla como un cuerpo libre y aplican las ecuaciones de equilibrio global. Esta teoría de cuerpo libre ha sido implementada en el método del Talud Infinito (Taylor, 1948), Método de Cuña (Sherard y col., 1963) y Método Ordinario (Fellenius, 1922), entre otros. Actualmente, la mayoría de métodos de equilibrio límite dividen a la masa potencial de falla en un número finito de dovelas. Luego, las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y/o de momentos son aplicadas a cada dovela. Generalmente, dovelas verticales son empleadas para dividir la masa de suelo; sin embargo, dovelas horizontales o inclinadas han sido usadas en algunas aplicaciones (Shahgholi y col., 2001; Sarma y Tan, 2006). En la Figura 2, se presenta la manera tradicional de dividir la masa de falla en dovelas verticales; además, se incluyen las fuerzas actuantes en una dovela (fuerzas interdovelas).

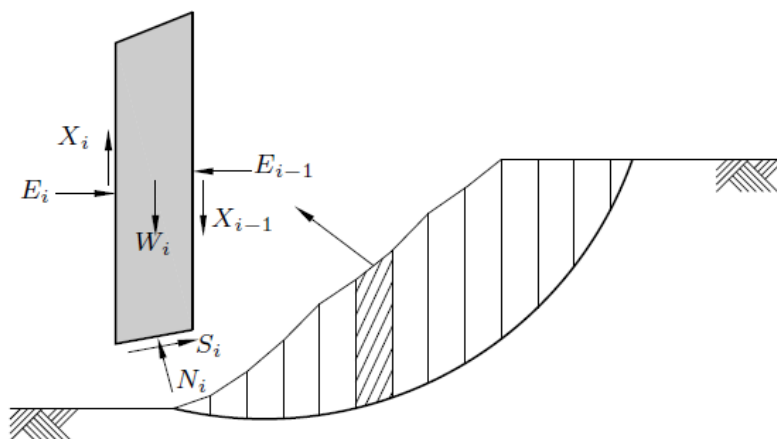


Figura 2. Masa deslizante dividida en dovelas verticales y fuerzas interdovelas.

En esta metodología MEL, tres ecuaciones de equilibrio pueden ser empleadas, estas son: equilibrio de fuerzas horizontales, equilibrio de fuerzas verticales y equilibrio de momentos. Algunas de las técnicas de dovelas usan una o dos ecuaciones de equilibrio haciendo la solución “no rigurosa”. Sin importar el procedimiento empleado para resolver el sistema de ecuaciones en los métodos de equilibrio límite, existirán más incógnitas que número de ecuaciones de equilibrio, haciendo la resolución de la estabilidad un problema estáticamente indeterminado. Generalmente, esta desigualdad es resuelta introduciendo arbitrariamente algunas simplificaciones en la ubicación y/o en la inclinación de las fuerzas interdovelas. Todos los métodos “rigurosos”, aquellos que satisfacen las tres ecuaciones de equilibrio, como el método de Spencer (1967) y de Morgenstern y Price (1965), entre otros, determinan valores del factor de seguridad (F_s) muy similares entre ellos (Duncan y Wright, 1980; Duncan, 1996). Para el caso en el que la superficie de falla sea circular, el método Simplificado de Bishop (1955) que emplea únicamente dos ecuaciones de equilibrio (fuerzas verticales y momentos), produce valores del factor de seguridad que están en correspondencia con los métodos rigurosos, siendo las diferencias máximas alrededor del 6% para una variedad de casos (Duncan, 1996). Esto es, debido a que para una superficie de falla circular, el valor del factor de seguridad es afectado de una manera marginal por la simplificación de las fuerzas interdovelas (Espinoza y col., 1994). Cuando no se conoce de antemano el tipo de falla, como es en la mayoría de los casos prácticos, los métodos rigurosos como el de Morgenstern y Price (1965) y Spencer (1967) deben ser usados, pues se obtienen valores consistentes y no presentan mayores dificultades numéricas. Krahn (2003) ha revisado los fundamentos de los MEL basados en dovelas y las

consecuencias de emplear únicamente las ecuaciones de equilibrio, ignorando las leyes constitutivas del material (relaciones esfuerzo - deformación). Este autor propone que algunas de las limitaciones del MEL pueden ser compensadas usando los esfuerzos obtenidos mediante un análisis en elementos finitos. Los trabajos de Duncan (1996) y Krahn (2003) presentan una revisión importante sobre los métodos de equilibrio límite.

3.1. *Consideraciones Generales en el MEL*

Las múltiples formulaciones existentes de equilibrio límite basado en dovelas, tienen características similares que emplean. Estas consideraciones comunes incluyen:

- La masa potencial de falla es dividida en un número finito de dovelas.
- La masa de falla actúa como un cuerpo rígido.
- Las fuerzas normales actúan en el centro de la base de las dovelas.
- La resistencia a lo largo de la superficie de falla es distribuida con el mismo factor de seguridad.
- Supuestos con relación a las fuerzas interdovelas son empleados para hacer el problema estáticamente determinado.
- El factor de seguridad es determinado a partir de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y/o momentos.
- Se emplean métodos interactivos, tipo prueba-error, para la solución del factor de seguridad.

A pesar de que estos métodos emplean los mismos conceptos, se ha observado que los diferentes métodos desarrollados dan, en ocasiones, diferente ubicación de la superficie de falla y diferentes valores del factor de seguridad (Espinoza y col., 1994; Zhu y col., 2003; Cheng y Zhu, 2004). Es por ello, que antes de aceptar la solución como válida, se deben tomar en cuenta los siguientes aspectos: (i) la ubicación de la línea de acción de fuerzas (thrust-line), línea que conecta los puntos de aplicación de las fuerzas interdovelas, ésta debe estar dentro de la masa de falla; (ii) la distribución de las fuerzas interdovelas; (iii) la dirección de las fuerzas interdovelas; y (iv) la distribución de las fuerzas normales y tangenciales a lo largo de la superficie de falla. En estos últimos tres aspectos, se debe comprobar que los resultados sean físicamente admisibles y que no presenten saltos o cambios bruscos de dirección (Sarma y Tan, 2006).

3.2. *Formulaciones Unificadas del MEL*

Considerando que todos los MEL tienen aspectos conceptuales similares, algunos intentos por unificar estos métodos han sido investigados por diferentes autores, entre ellos podemos mencionar a: Fredlund y Krahn (1977) que compararon seis de los MEL más usados para el análisis de la estabilidad de pendientes, con el afán de compararlos sistemáticamente, y desarrollaron el Método General de Equilibrio Límite (General Limit Equilibrium, GLE). Espinoza y col. (1994) presentaron una formulación unificada, debido a que todos los MEL cuentan con características similares con relación a la formulación matemática. Más recientemente, Zhu y col. (2003) mejoraron las técnicas unificadas y desarrollaron un procedimiento numérico para la determinación del factor de seguridad.

3.3. *Cálculo Variacional en el MEL*

Un caso particular de la formulación de equilibrio límite es aquel que emplea el cálculo variacional para determinar la solución (Castillo y Revilla, 1977; Ramamurthy y col., 1977; Baker y Garber, 1978). En la técnica variacional las suposiciones en el MEL, respecto a las fuerzas interdovelas, ya no son necesarias. Esta metodología se basa en técnicas de optimización, en la cual el parámetro funcional (factor de seguridad) es minimizado tratando a la superficie de falla, a la distribución de esfuerzos normales y a la distribución de las fuerzas interdovelas, como variables. Sin embargo, algunas objeciones han sido presentadas referente a la formulación variacional (Luceno y Castillo, 1980; De Jong, 1981; Castillo y Luceno, 1982). Aunque este método presenta algunas ventajas sobre los métodos tradicionales, al igual que estos últimos, la forma y ubicación de la superficie de falla deben ser arbitrariamente asumidas. En la práctica, los métodos variacionales no son empleados para

el análisis de la estabilidad de pendientes, pero si han sido introducidos en las técnicas para determinar la superficie de falla crítica (Baker, 1980).

4. MÉTODO DE ANÁLISIS LÍMITE (MAL)

Este método se sustenta en los conceptos del límite-inferior y límite-superior, los mismos que han sido empleados en el cálculo del factor de seguridad para el análisis de pendientes por algunos investigadores (Chen, 1975; Chen y Liu, 1990; Michalowski, 1995). El MAL no emplea suposiciones estáticas; no obstante, una selección a priori de mecanismo de falla es requerida. En estos métodos, el mecanismo de falla debe ser impuesto bajo el concepto de cuerpo rígido. Algunos de los mecanismos de falla empleados han sido: plano rotacional, plano translacional y espiral logarítmica; esta última, dando los resultados más críticos.

El teorema del límite inferior se basa en un campo de esfuerzos estáticamente admisible, en el cual el trabajo realizado por las cargas superficiales en el contorno, donde la velocidad es prescrita, debe ser mayor a o igual que el trabajo realizado por las cargas superficiales en cualquier campo de esfuerzos estáticamente admisible. Para que un campo de esfuerzos sea estáticamente admisible, este debe satisfacer las condiciones de contorno y no debe exceder el criterio de fluencia en ningún punto. En otras palabras, en el límite-inferior una distribución de esfuerzos es buscada de tal manera que cumpla el equilibrio en toda la masa de suelo, satisfaga las tracciones impuestas, no violente el criterio de fluencia, y maximice la carga de falla. El teorema del límite-superior se basa en un campo de velocidades cinemáticamente admisible, en el cual el trabajo realizado por las fuerzas superficiales y másicas debe ser, menor que o igual que la energía de disipación en cualquier mecanismo de falla cinemáticamente admisible. Un mecanismo cinemáticamente admisible es aquel que cumple la ley de fluencia y satisface las condiciones de borde cinemáticas. Por lo tanto, en el análisis del límite-superior, una distribución de velocidad es buscada para que cumpla la ecuación de compatibilidad, la ley de fluencia, las condiciones de velocidad y minimice la energía interna de disipación.

Los dos teoremas empleados determinan dos valores extremos de la carga de fallo; pero no el valor exacto. Un campo de esfuerzos estáticamente admisible (límite-inferior) es más complejo de definir que un mecanismo de falla cinemáticamente admisible. Es así, que el análisis de la estabilidad de pendientes se ha investigado, comúnmente, empleando el teorema del límite-superior (Chen y col., 1969). La Figura 3 presenta el mecanismo de falla rotacional de una superficie espiral-logarítmica. La masa de suelo rota como un cuerpo rígido alrededor del centro (0).

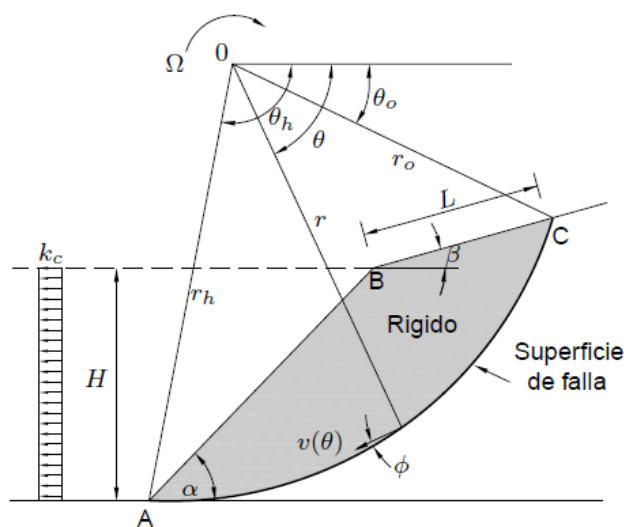


Figura 3. Superficie de falla espiral-logarítmica empleada en el método de análisis límite.

5. MÉTODOS NUMÉRICOS

En las técnicas numéricas no es necesario imponer las condiciones empleadas tanto en los MEL y MAL, como son la ubicación y forma de la superficie de falla, y fuerzas interdovelas en el caso del MEL. Los métodos numéricos pueden considerarse, desde el punto de vista matemático, como aquellos que se aproximan mejor a la solución exacta. Los avances en el poder computacional y la disponibilidad de códigos numéricos de bajo costo, han hecho que estas técnicas sean muy atractivas para la investigación de la estabilidad de pendientes. Los métodos numéricos empleados en la estabilidad de pendientes pueden clasificarse en tres grupos principales:

- Métodos Continuos, como los elementos finitos (Finite Element Method, FEM), diferencias finitas (Finite Difference, FDM), elementos de contorno (Boundary Element, BEM).
- Métodos Discontinuos, como el método discreto (Discrete/Distinct Element, DEM), redes de fractura discreta (Discrete Fracture Network, DFN), códigos de partículas (Particle Flow Codes, PFC).
- Métodos Híbridos, como FEM-BEM, DEM-BEM, FEM-DEM.

En las formulaciones de los métodos continuos el dominio geométrico es discretizado en un número finito de elementos y la solución se encuentra empleando aproximaciones numéricas en las ecuaciones diferenciales. Si la pendiente contiene series de discontinuidades geotécnicas, que podrían controlar el mecanismo de falla, los métodos discontinuos serían los más apropiados para el análisis de la estabilidad. Los métodos discontinuos consideran al dominio geométrico como una agrupación de elementos discretos interrelacionados. El desarrollo de estos métodos representa un importante paso en el entendimiento del comportamiento de los macizos rocosos fracturados. Si bien, los códigos de los métodos continuos pueden ser modificados para incluir las discontinuidades, esta modificación es muy compleja (Eberhardt y col., 2004). Los métodos híbridos han sido usados con mayor frecuencia en la ingeniería de rocas, empleándose los métodos combinados BEM-FEM, BEM-DEM y PFC-FDM. Estos métodos tratan de optimizar los recursos y ventajas de los métodos existentes para emplearlos en diferentes áreas del dominio geométrico; por ejemplo, los elementos de contorno se pueden emplear en el contorno del dominio y los elementos finitos en las condiciones locales. Los métodos FEM y FDM son las técnicas numéricas de mayor aplicación en el área de la geotecnia. Estos métodos cuentan con la suficiente flexibilidad para tratar problemas de deformaciones, falla progresiva, dilatación, comportamiento complejo del suelo, efectos tridimensionales, y pueden incluir, de muy fácil manera, las presiones de agua de poros y cargas dinámicas. La característica más atractiva del FEM, es su capacidad de manejar geometrías complejas con facilidad y eficiencia.

6. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM)

Para determinar el factor de seguridad o la carga última, el FEM puede ser empleado a través de dos procedimientos (Naylor, 1982): Directo y Límite Mejorado. En el directo, el análisis de la estabilidad de pendientes es realizado, o bien, disminuyendo sistemáticamente la resistencia cortante del suelo (Método de reducción de la resistencia al corte) o en su defecto, incrementando las cargas superficiales o máscas aplicadas. En el procedimiento límite mejorado, el campo de esfuerzos, determinado mediante un análisis de elementos finitos, es empleado conjuntamente con los conceptos de equilibrio límite para determinar la estabilidad. Un ejemplo de la discretización del dominio geométrico, mediante elementos finitos, se presenta en la Figura 4.

6.1. Método de Reducción de la Resistencia al Corte

El método de reducción de la resistencia al corte, para el análisis de la estabilidad de pendientes, tanto en problemas bidimensionales como tridimensionales, ha visto un incremento en su empleo, especialmente en la comunidad científica (Zienkiewicz y col., 1975; Matsui y San, 1992; Ugai y Leshchinsky, 1995; Griffiths y Lane, 1999). Sin embargo, en la práctica profesional de la geotécnica,

su uso se ha visto relegado. La razón de esta lenta incorporación en la industria profesional se puede atribuir a que los profesionales tienen una gran experiencia en el uso de los métodos de equilibrio límite; además, estas técnicas numéricas no han sido cubiertas en los planes de estudios universitarios. Otra razón puede deberse a que los profesionales son escépticos de los métodos numéricos, pues estas técnicas requieren la implementación de las leyes constitutivas que deben determinarse sobre la base de investigación detallada de campo y laboratorio. Esta última razón, se sustenta cuando en la práctica es necesario definir con precisión los valores de desplazamientos que van a tener los suelos bajo las cargas impuestas, pero no se justifica en el caso de la estabilidad de pendientes; en este último caso, se emplean los mismos parámetros tradicionalmente usados en los métodos convencionales: los valores de cohesión y ángulo de fricción interno. Si bien, en las técnicas numéricas es necesario conocer otros parámetros como son: el módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson y ángulo de dilatación, la selección de estos parámetros puede hacerse basándose en tablas existentes. Los valores seleccionados, en rangos adecuados, no juega un papel importante en la determinación del factor de seguridad. Las razones antes expuestas irán disminuyendo con el tiempo a medida que más y más profesionales, con conocimiento de los conceptos de estas técnicas, se vayan incorporando en la vida profesional y en las compañías geotécnicas especializadas en estos análisis.

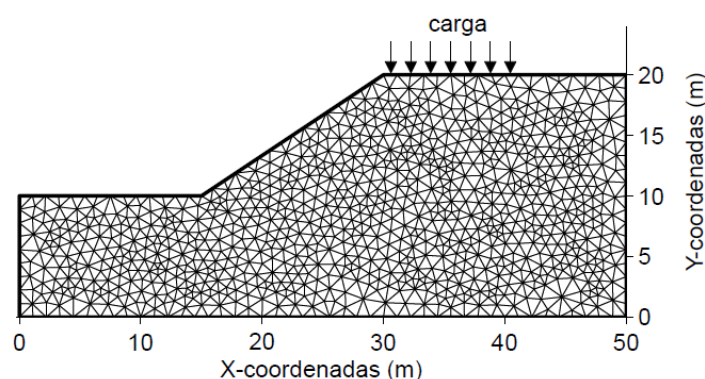


Figura 4. Geometría de la pendiente discretizada en elementos triangulares.

Es importante mencionar que el método directo ofrece algunos beneficios comparado con los métodos tradicionales de análisis de la estabilidad de pendientes. Las siguientes ventajas pueden ser mencionadas (Matsui y San, 1992; Potts, 2003; Zheng, 2005):

- No es necesario hacer supuestos, ni en la forma, ni en la ubicación de la superficie de falla. El mecanismo de falla se encuentra a través de las zonas donde la masa de suelo es incapaz de resistir los esfuerzos aplicados. Es así que la superficie de falla se desarrolla de manera automática, sin forzar ni su ubicación, ni su forma.
- La masa de suelo no se divide en dovelas, por lo que no es necesario las suposiciones en cuanto a las fuerzas interdovelas.
- Si se emplea parámetros elasto-plásticos reales en la modelización, la solución encontrada por este método proporciona información de desplazamientos y deformaciones a esfuerzos reales de trabajo. El FEM se puede emplear para determinar las deformaciones desarrolladas por diferentes combinaciones de carga y por diferentes procesos constructivos.
- El método es idóneo para modelar la falla progresiva desde el inicio hasta la culminación de la misma.
- Casos complejos, por ejemplo estratigrafía compleja, pueden ser modelados con facilidad.
- La interacción suelo-estructura puede ser considerada, por ejemplo en pendientes donde es necesario el empleo de estructuras de refuerzo.
- Características del comportamiento en tres-dimensiones pueden ser fácilmente acopladas.

Se debe mencionar que los resultados obtenidos por el FEM tanto en los valores del factor de seguridad, cuanto en la ubicación y forma de la superficie de falla, son similares con aquellos resultados obtenidos por los métodos tradicionales (Griffiths y Lane, 1999; Bojorque y col., 2008), corroborando de esta manera la aplicabilidad del método para el análisis de la estabilidad de pendientes y manteniendo todas sus ventajas.

6.2. Método de Incremento de los Esfuerzos

Otra técnica para determinar la carga última y/o el factor de seguridad es incrementando los esfuerzos aplicados a la pendiente. Generalmente, se incrementa sistemáticamente las fuerzas másicas de gravedad en todos los elementos, produciendo de esta manera, que el sistema no converja y se determina el fallo de la pendiente en este instante. Para los casos de ejemplos simples en suelos homogéneos, los resultados encontrados tanto para el método de incremento de esfuerzos cuanto para el de reducción de la resistencia son coincidentes (Swan y Seo, 1999). El empleo de uno u otro método dependerá de los factores que influyen en la estabilidad, por ejemplo un decremento de la resistencia del suelo o un incremento de las fuerzas másicas. Por ello, el método del incremento de esfuerzos se emplea, generalmente, como variante del método pseudo-estático para determinar el coeficiente sísmico crítico (Loukidis y col., 2005; Bojorque y col., 2007; Shukha y Baker, 2008). El coeficiente sísmico indica el valor máximo al que se podría incrementar la fuerza horizontal hasta que la pendiente colapse.

6.3. Método Límite Mejorado

En el método límite mejorado los resultados obtenidos en un análisis de esfuerzos por medio de elementos finitos son utilizados para aplicar las ecuaciones de equilibrio en un análisis de equilibrio límite (Farias y Naylor, 1998; Fredlund y col., 1999; Krahn, 2003). Los pasos básicos que se siguen en el presente método son: (i) realizar un análisis de esfuerzos por medio de elementos finitos usando características de un material elástico-lineal o elasto-plástico; (ii) suponer una superficie de falla; (iii) dividir la masa sobre la superficie de falla en dovelas; (iv) calcular los esfuerzos normales y de corte a lo largo de la superficie de falla; (v) emplear los esfuerzos normales y parámetros de resistencia para calcular la resistencia al cortante a lo largo de la superficie de falla; y (vi) determinar el factor de seguridad global. En la Figura 5 se presenta el esquema descrito anteriormente.

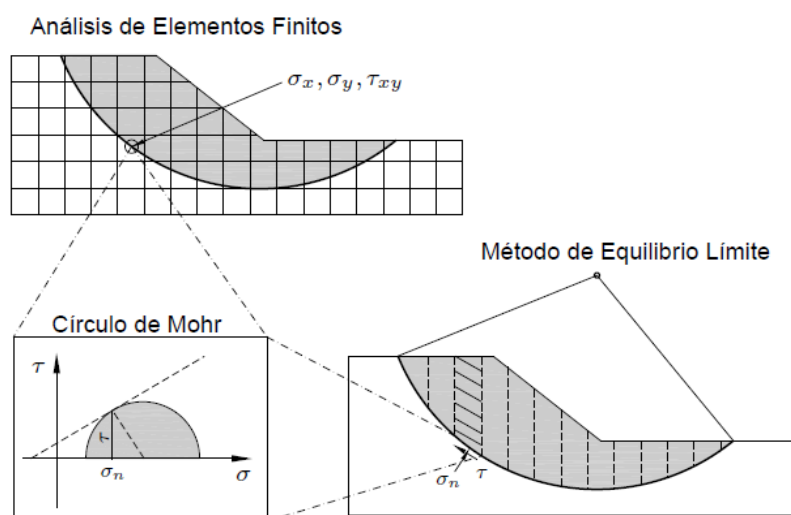


Figura 5. Esquema del Método Límite Mejorado (modificado de Fredlund y Scoular, 1999).

El factor de seguridad se determina como la integral de la resistencia actual del material (τ_i) sobre la integral de la resistencia al fallo (τ_{fi}). Al emplear las dovelas, la integral es sustituida por la sumatoria de cada dovela, ecuación (6):

$$F_s = \frac{\int \tau_i \cdot dL}{\int \tau_{fi} \cdot dL} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_i \cdot L_i}{\sum_{i=1}^n \tau_{fi} \cdot L_i} \quad (6)$$

donde, n es el número total de dovelas e i representa la dovela analizada.

Del análisis por elementos finitos se determinan los esfuerzos horizontales, verticales y de corte, σ_x , σ_y , y σ_{xy} , por lo que es necesario transformarlos a esfuerzos normales (σ_n) y cortantes (τ) actuando a lo largo de la potencial superficie de falla. Esta transformación se la realiza empleando la ecuación (7) y (8):

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha_i) - \tau_{xy} \sin(2\alpha_i) \quad (7)$$

$$\tau = \tau_{xy} \cos(2\alpha_i) - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\alpha_i) \quad (8)$$

donde, α_i es el ángulo de la base de la dovela con respecto al eje x , este ángulo es tomado desde el centro de cada dovela. Al igual que en los métodos de equilibrio límite, la superficie de falla crítica se determina imponiéndose una nueva superficie potencial y repitiendo los pasos anteriores hasta determinar la superficie que dé el menor factor de seguridad.

7. OTROS MÉTODOS EMPLEADOS EN LA ESTABILIDAD DE PENDIENTES

Los métodos híbridos (mixtos, combinados), empleando conceptos de varias técnicas, han sido desarrollados por la necesidad de sobrellevar algunas de las limitaciones existentes en los otros métodos. La principal idea detrás de estos métodos híbridos es el de usar las ventajas de cada método para diferentes aspectos del problema. En el análisis de estabilidad de pendientes, los métodos que se han empleado incluyen combinaciones entre el MEL-FEM, MAL-FEM, y MEL-MAL. Ejemplos de estos métodos son: el método límite mejorado combinado el FEM con el MEL, o el método de análisis por elementos finitos rígidos (Rigid Finite Element Analysis, RFEM) (Chen y col., 2003; Chen y col., 2004) y los métodos híbridos de FEM-MAL (Kim y col., 1999; Kim y col., 2002). Es importante recalcar que estos métodos híbridos incorporan cada vez más conceptos relacionados con los elementos finitos para garantizar su aplicabilidad a problemas complejos. Otros ejemplos del uso del método de análisis límite con elementos finitos para el análisis de la estabilidad de pendientes se pueden encontrar en Sloan y Kleeman (1995), Jiang y Magnan (1997) y Yu y col. (1998). Este tipo de formulación se define en la literatura como análisis límite por elementos finitos (Finite Element Limit Analysis). Estas últimas combinaciones son muy rápidas y confiables, y pueden modelar suelos heterogéneos, anisotropía, cargas complejas, discontinuidades, condiciones de borde complejas y en tres-dimensiones (Sloan, 1988; Sloan, 1989; Lyamin y Sloan, 2002).

8. CONCLUSIONES

Actualmente, para el análisis de la estabilidad de pendientes existen diferentes métodos pasando por los analíticos, continuando con los simples y finalizando con los numéricos. Los métodos analíticos, debido a las restrictivas simplificaciones que son necesarias para resolver el problema, no son muy empleados en la práctica. Los métodos simples, como es el caso de los métodos de equilibrio límite y

análisis límite, han tenido una gran aplicación en el análisis de inestabilidades; especialmente los primeros, donde se han desarrollado muchas variantes a lo largo del tiempo. Los métodos numéricos, especialmente el método de elementos finitos, han tenido un gran impulso en las últimas décadas demostrando ser aplicables a varias condiciones, dando resultados similares a los obtenidos por métodos tradicionales; pero incrementando su potencial para futuras aplicaciones, ya que no se basan en la imposición de la forma y ubicación de la superficie de falla y pueden tomar en consideración la interacción suelo-estructura. La característica más atractiva del método de elementos finitos es su capacidad de manejar geometrías complejas con facilidad y eficiencia.

Uno de los factores más importantes en el análisis de la estabilidad de pendientes es el efecto de la infiltración del agua. Este proceso genera un cambio en el estado tensorial en la pendiente que debe equilibrarse, al mismo tiempo, este nuevo estado tensorial modifica las propiedades del suelo, especialmente la permeabilidad cambiando las propiedades del flujo del agua en el suelo. Métodos eficientes para tratar este tipo de interacción son necesarios. Si bien, la teoría y técnicas numéricas para este tipo de análisis existen, la determinación de la estabilidad de las pendientes bajo estas condiciones no ha sido aún investigada.

Los suelos son en general muy heterogéneos; por lo tanto, este efecto se debe considerar por medio de métodos estocásticos, que puedan tratar esta variedad inherente del suelo. El método de elementos finitos se puede utilizar para investigar los efectos de la heterogeneidad del suelo en la estabilidad de las pendientes. La principal limitación, en la actualidad, es la falta de información de campo necesaria para realizar un análisis de probabilidades (estocástico) significativo.

El buen desempeño de los modelos de estabilidad de pendientes depende de la habilidad de obtener datos de calidad de un programa de monitoreo. Mientras que el buen desempeño del monitoreo depende de la habilidad de juzgar adecuadamente la posición de los instrumentos en la pendiente. Un monitoreo eficaz puede guiar a la activación de sistemas de alerta temprana, lo que ayuda a disminuir la probabilidad de acontecimientos adversos producidos por los deslizamientos. En general, debido a las limitaciones económicas, no es posible implementar una red de monitoreo de deslizamientos completa, que podrían incluir: inclinómetros, extensómetros y piezómetros, entre otros dispositivos. En la práctica, el presupuesto del proyecto, generalmente, limita el programa de monitoreo a muy pocos instrumentos; por lo que, la correcta ubicación de los mismos, tanto sobre la pendiente como debajo de la misma, es esencial para obtener información adecuada que permita investigar la dinámica del movimiento. Esta información obtenida del monitoreo debe alimentar a los modelos de estabilidad y a su vez estos deben retroalimentar al programa de monitoreo para calibrar y validar el mismo. De ahí que la investigación debería enfocarse en ambos aspectos: monitoreo y modelación, como debe hacerse en todo ejercicio de modelación numérica.

BIBLIOGRAFÍA

- Baker, R., M. Garber, 1978. Theoretical analysis of the stability of slopes. *Géotechnique*, 28, 395-411.
- Baker, R., 1980. Determination of the critical slip surface in slope stability computations. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 4, 333-359.
- Bishop, A.W., 1955. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes. *Géotechnique*, 5, 7-17.
- Bojorque, J., G. De Roeck, J. Maertens, 2007. Determination of the critical seismic acceleration coefficient in slope stability analysis using finite element methods. *Int. Congress on Development, Environment and Natural Resources: Multi-level and Multi-scale Sustainability*, 2, UMSS, Cochabamba, Bolivia.
- Bojorque, J., G. De Roeck, J. Maertens, 2008. Comments on two-dimensional slope stability analysis by limit equilibrium and strength reduction methods. *Comput. Geotech.*, 35, 305-308.

- Canuti, P., A. Frassoni, L. Natale, 1994. Failure of the río Paute landslide dam. *Landslide News*, 8, 6-7. Descargado de <http://japan.landslide-soc.org/publications/l-news/08/index.htm> el 15 de junio de 2010.
- Castillo, E., J. Revilla, 1977. One application of the calculus of variations to the stability of slopes. *9th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundations Engineering*, Tokyo, Japan, 2, 25-30.
- Castillo, E., A. Luceno, 1982. A critical analysis of some variational methods in slope stability analysis. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 6, 195-209.
- Coulomb, C.A., 1776. Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs al architecture. *Mem. Math. Phys. Acad. R. Sci.*, 7, 343-382.
- Chen, W.F., M.W. Giger, H.Y. Fang, 1969. On the limit analysis of stability of slopes. *Soils and Foundations*, 9, 23-32.
- Chen, W.F., 1975. Limit analysis and soil plasticity. *Elsevier Publ. Comp.*, Amsterdam, The Netherlands, 639 págs.
- Chen, W.F., X.L. Liu, 1990. Limit analysis in soil mechanics. *Elsevier Publ. Comp.*, Amsterdam, the Netherlands, 477 págs.
- Chen, J., J.H. Yin, C.F. Lee, 2003. Upper bound limit analysis of slope stability using rigid finite elements and nonlinear programming. *Can. Geotech. J.*, 40, 742-752.
- Chen, J., J.H. Yin, C.F. Lee, 2004. Rigid finite element method for upper bound limit analysis of soil slopes subjected to pore water pressure. *J. Eng. Mech.*, 130, 886-893.
- Cheng, Y.M., L.J. Zhu, 2004. Unified formulation for two dimensional slope stability analysis and limitations in factor of safety determination. *Soils and Foundations*, 44, 121-127.
- De Jong, G., 1981. Variational fallacy. *Géotechnique*, 31, 289-290.
- Duncan, J.M., S.G. Wright, 1980. The accuracy of equilibrium methods of slope stability analysis. *Eng. Geol.*, 16, 5-17.
- Duncan, J.M., 1996. State of the art: Limit equilibrium and finite-element analysis of slopes. *J. Geotech. Eng.*, 122, 577-596.
- Eberhardt, E., D. Stead, J.S. Coggan, 2004. Numerical analysis of initiation and progressive failure in natural rock slopes - the 1991 Randa rockslide. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 41, 69-87.
- EM-DAT, 2008. The OFDA/CRED International Disaster Database. Technical Report, Université Catholique de Louvain, Brussels, Belgium. Descargado de <http://www.emdat.be> el 15 de junio de 2010.
- Espinoza, R.D., P.L. Bourdeau, B. Muhunthan, 1994. Unified formulation for analysis of slopes with general slip surface. *J. Geotech. Eng.*, 120, 1185-1204.
- Fell, R., J. Corominas, C. Bonnard, L. Cascini, E. Leroi, W.Z. Savage, 2008. Guidelines for landslide susceptibility, hazard and risk zoning for land use planning. *Eng. Geol.*, 102, 85-98.
- Farias, M.M., D.J. Naylor, 1998. Safety analysis using finite elements. *Comput. Geotech.*, 22, 165-181.
- Fellenius, W., 1922. Statens Jarnvagens Geotekniska Kommission: Slutbetankande. (in Swedish). *Technical Report*, Stockholm, Sweden, 1018 págs.
- Fredlund, D.G., J. Krahn, 1977. Comparison of slope stability methods of analysis. *Can. Geotech. J.*, 14, 429-439.
- Fredlund, D., R. Scoular, N. Zakerzadeh, 1999. Using a finite element stress analysis to compute the factor of safety. *52nd Canadian Geotechnical Conf.*, Saskatchewan, Canada, 73-80.
- Fredlund, D.G., R.E. Scoular, 1999. Using limit equilibrium concepts in finite element slope stability analysis. *Int. Symp. on Slope Stability Engineering, Matsuyama, Shikoku*, Japan, 31-47.
- Griffiths, D.V., 1980. Finite element analyses of walls, footings and slopes. *Symp. on Comp. Applic. to Geotech. Probs. in Highway Eng.* Randolph, M.F. (Ed.), *Geotechnical Analysts Ltd.*, Cambridge, UK, 122-146.
- Griffiths, D.V., P. Lane, 1999. Slope stability analysis by finite elements. *Géotechnique*, 49, 387-403.

- Huybrechts, N., 2005. Workpackage 3: Innovative design tools in geotechnics. Technical Report, *GeoTechNet - European Geotechnical Thematic Network*.
- Jiang, G.L., J.P. Magnan, 1997. Stability analysis of embankments: Comparison of limit analysis with methods of slices. *Géotechnique*, 47, 857-872.
- Kim, J., R. Salgado, H.S. Yu, 1999. Limit analysis of soil slopes subjected to pore-water pressures. *J. Geotech. Geoenviron.*, 125, 49-58.
- Kim, J., R. Salgado, J. Lee, 2002. Stability analysis of complex soil slopes using limit analysis. *J. Geotech. Geoenviron.*, 128, 546-557.
- Krahn, J., 2003. The 2001 R.M. Hardy Lecture: The limits of limit equilibrium analyses. *Can. Geotech. J.*, 40, 643-660.
- Loukidis, D., P. Bandini, R. Salgado, 2005. Critical seismic coefficient using limit analysis and finite elements. *11th Int. Conf. on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, ISMGE*, Osaka, Japan.
- Luceno, A., E. Castillo, 1980. Evaluation of variational methods in slope analysis. *Int. Symp. on Landslides*, New-Delhi, India, 255-258.
- Lyamin, A.V., S.W. Sloan, 2002. Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 26, 181-216.
- Matsui, T., K-C. San, 1992. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique. *Soils and Foundations*, 32, 59-70.
- Michalowski, R.L., 1995. Stability of slopes: limit analysis approach. *Rev. Eng. Geol.*, 10, 51-62.
- Morgenstern N.R., V.E. Price, 1965. The analysis of the stability of general slip surface. *Géotechnique*, 15, 289-290.
- Naylor, D.L., 1982. Finite elements and slope stability. In: Numerical methods in geomechanics. Martins, J.B. (Ed.), *Reidel Publishing Company*, 229-244.
- Plaza-Nieto, G., O. Zevallos, 1994. The 1993 La Josefina rockslide and Rio Paute landslide dam, Ecuador. *Landslide News*, 8, 4-6. Descargado de <http://japan.landslide.soc.org/publications/news/08/index.htm> el 15 de junio de 2010.
- Potts, D., L. Zdravkovic, 1999. Finite element analysis in geotechnical engineering: Theory. *Thomas Telford Ltd.*, London, UK
- Potts, D.M., 2003. Numerical analysis: a virtual dream or practical reality? *Géotechnique*, 53, 535-573.
- Ramamurthy, T., C. Narayan, V.P. Bhatkar, 1977. Variational method for slope stability analysis. *9th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Tokyo, Japan, 139-142.
- Rankine, W., 1857. On the stability of loose earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, UK, Vol. 147.
- Sarma, S.K., D. Tan, 2006. Determination of critical slip surface in slope analysis. *Géotechnique*, 56, 539-550.
- Schuster, R.L., 1996. Socioeconomic significance of landslides in Landslides: Investigation and Mitigation. *Transportation Research Board*, Washington D.C., USA. Special Report, 247, 12-35.
- Shahgholi, M., A. Fakher, C.J. Jones, 2001. Horizontal slice method of analysis. *Géotechnique*, 51, 881-885.
- Sherard, J.L., S.F. Woodward, S.F. Gizienski, 1963. Earth and earth-rock dams. *John Willey & Sons, Inc.*, NY, USA, 354-358.
- Shukha, R., R. Baker, 2008. Design implications of the vertical pseudo-static coefficient in slope analysis. *Comput. Geotech.*, 35, 86-96.
- Sloan, S.W., P.W. Kleeman, 1995. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 127, 293-314.
- Sloan, S.W., 1988. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 12, 61-77.

- Sloan, S.W., 1989. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 13, 263-282.
- Spencer, E., 1967. A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel inter-slice forces. *Géotechnique*, 17, 11-26.
- Swan, C.C., Y.K. Seo, 1999. Limit state analysis of earthen slopes using dual continuum/FEM approaches. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 23, 1359-1371.
- Taylor, D.W., 1948. Fundamental Soil Mechanics. *John Wiley & Sons, Inc.*, NY, USA, 700 págs.
- Ugai, K., D. Leshchinsky, 1995. Three-dimensional limit equilibrium and finite element analyses : A comparison of results. *Soils and Foundations*, 35, 1-7.
- Yu, H.S., R. Salgado, S.W. Sloan, J.M. Kim, 1998. Limit analysis versus limit equilibrium for slope stability. *J. Geotech. Geoenviron.*, 124, 1-11.
- Zheng, H., D.F. Liu, C.G. Li, 2005. Slope stability analysis based on elasto-plastic finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 64, 1871-1888.
- Zhu, D.Y., C.F. Lee, H.D. Jiang, 2003. Generalised framework of limit equilibrium methods for slope stability analysis. *Géotechnique*, 53, 377-395.
- Zienkiewicz, O.C., C. Humpheson, R.W. Lewis, 1975. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics. *Géotechnique*, 25, 671-689.