tsantsa REVISTA DE INVESTIGACIONES ARTISTICAS
Congreso Internacional IDEA 07-14. diciembre.2022
FACULTAD DE ARTES/ UNIVERSIDAD DE CUENCA
N°13 Diciembre de 2022

Representación del infinito en el arte a través de la geometría

Representation of infinity in art through geometry

MIRTHA PALLARÉS TORRES
Universidad de Chile (Chile)
mipallar@uchile.cl

M. EUGENIA PALLARÉS TORRES
Universidad de Chile (Chile)
mpallare@uchilefau.cl

Recibido: 16 de junio de 2022
Aceptado: 20 de noviembre de 2022

RESUMEN:
La investigación tuvo como objetivo analizar la incorporación de las geometrías Euclidiana e Hiperbólica en el plano y su aplicación en el arte bajo el concepto de infinito potencial. A partir de una metodología basada en el recubrimiento del plano y la construcción de teselas se busca reconocer y comprender mediante la visualización como las distintas concepciones geométricas bajo reglas propias describen a través de la representación y el dibujo geométrico el concepto de infinito aplicado en el arte. Mediante la creación de formas que se ensamblan disminuyendo o aumentando su tamaño como sucesiones recurrentes, se generaron infinitas figuras que dan origen a una superficie finita plana con infinitos elementos semejantes. El estudio enseña cómo cada geometría aplicada interpreta el concepto de infinito en el arte y la correlación entre ambas.

PALABRAS CLAVE: Geometría Euclidiana e Hiperbólica, Concepto de Infinito, Arte.

ABSTRACT:
The objective of the research was to analyze the incorporation of Euclidean and Hyperbolic geometries in the plane and its application in art under the concept of infinite potential. From a methodology based on the covering of the plane and the construction of tesserae, we seek to recognize and understand through visualization how the different geometric conceptions under their own rules describe, through representation and geometric drawing, the concept of infinity applied in art. Through the creation of shapes that are assembled by decreasing or increasing their size as recurring successions, infinite figures were generated that give rise to a flat finite surface with infinite similar

elements. The study shows how each applied geometry interprets the concept of infinity in art and the correlation between the two

KEYWORDS: Euclidean - Hyperbolic Geometry, Infinite Concept, Art.

* * * * *

Introducción

La geometría como exploración, construcción y dominio del espacio permite la representación de la realidad mediante un proceso dinámico, donde el espacio es un medio continuo, tridimensional, con limites indefinidos, donde se desarrollan las actividades de los seres humanos. La comprensión de este entorno requiere de habilidades asociadas al sentido espacial, al dominio de propiedades geométricas de figuras y al desarrollo de la percepción, imaginación además del razonamiento lógico y abstracto (Pando, 2009), enfoque integrador que incluye la comunicación y los significados del arte. En este contexto es posible asociar conceptos propios de la geometría que son útiles e importantes para distintas áreas del conocimiento destacando el arte y sus distintas expresiones tales como la arquitectura, la música, la pintura y el diseño gráfico entre otras, representaciones artísticas que incorporan en su construcción la geometría, y que en la enseñanza se transforma en un recurso didáctico para el desarrollo de conceptos matemáticos de una manera visual e innovadora destinada a contextualizar contenidos (Vallejo, 2011)

La asociación de las matemáticas con el arte suele focalizarse en la generación de distintos procesos compositivos tendientes a ofrecer formas producidas a partir de relaciones, situación que en el caso de la arquitectura es posible de observar en edificaciones que incorporan conceptos como la proporción aurea que a través de la composición y la armonía indagan en la perfección, o en las variadas simetrías que se han utilizado para el desarrollo de diversas obras en la Antigua Roma y en el arte islámico. Es importante destacar que el arte ha influido en el desarrollo de las matemáticas, específicamente durante el renacimiento cuando los artistas a través de la perspectiva buscaron plasmar en el plano objetos tridimensionales utilizando la geometría proyectiva.

Los vínculos que la geometría mantiene con la cultura artística en el tiempo ha favorecido la construcción de los conocimientos geométricos, entendiendo que son disciplinas que abordan temáticas diferentes, el arte centrado en la creatividad, la intuición, la libertad, la subjetividad y la emoción, mientras que la ciencia se relaciona con el razonamiento, el orden y la objetividad, generadora de conocimiento (Vicente, 2003). Sin embargo, para Franco (2006)

> … se ha partido de la idea que las creaciones y representaciones artísticas realizadas mediante el empleo exclusivo de formas geométricas es un medio expresivo inherente al desarrollo cultural de la humanidad. Aceptando esta idea, se cree en la posibilidad de agrupar las distintas manifestaciones artísticas que utilizan exclusivamente formas geométricas, con el fin de diagnosticar las características plásticas predominantes de la obra geométrica en el arte de fin de siglo. (p.13)

Geometría que se materializa como el ámbito natural de conexión mediante las proporciones, la perspectiva, las isometrías, los elementos del plano y las formas geométricas en el diseño de las obras del artista (Vallejo López, 2011). Fundamentación teórica que ha variado en el tiempo, independiente de que la base de la geometría plana sigue siendo la obra de Euclides y la negación al quinto postulado[1] ha dado origen a otras geometrías, las no Euclidianas y con ello a otras formas de percibir y describir el espacio. Básicamente porque manejan diferentes concepciones sobre el espacio que pretenden representar. Operación factible de llevar a cabo cuando el observador puede establecer una analogía entre las relaciones espaciales que se establecen en la situación observada en un espacio que opera con reglas propias, como la concepción espacial del pensamiento y al mismo tiempo de visualización de esa conceptualización

Estructuralmente el pensamiento respecto de la vida se asocia a ciclos que se repiten, involucrando elementos materiales y espirituales que se integran a través de un continuo infinito de transformaciones que ocurren en el espacio y que tiene una representación gráfica que en el arte se asocia al concepto de infinito, que matemáticamente se explica a través de los conceptos de límite, serie, proceso recursivos y conjuntos infinitos y acotados (Belmonde y Sierra, 2011), se trata de relaciones numéricas y geométricas representadas por el número ocho en posición horizontal, debido a que formalmente se relaciona con el concepto de continuidad, ya que no es posible determinar su inicio y fin y además de que todos sus elementos se encuentran conectados. Representación simbólica que también es factible de encontrar en la simbología ancestral griega del uróboros, personificado por un animal con forma de serpiente que se muerde la cola, significado asociado a los ciclos que se repiten y que generan un nuevo comienzo luego de un término, como la naturaleza, la continuidad de la existencia, la purificación y el ciclo eterno de la vida y la muerte.

Interpretación gráfica del infinito que se asocia a la idea de crecimiento ilimitado o continuidad y que como expresión matemática se refiere a un número que no tiene límites, un infinito con principio, pero sin fin, que expresa lo cuantitativo. Inserto para Newton en el universo infinito, afirmación que surge de la distinción que hace entre espacio absoluto donde pertenece el infinito físico y el espacio relativo, lo que admite la construcción de la geometrización del espacio, permitiendo que se transforme en el infinito de la matemática vinculada al tamaño, lugar y extensión.

> Nuestra visión actual del infinito en la matemática distingue dos acepciones: la primera está asociada a la ausencia de límites o de fronteras, a la falta de conclusión o de término de un proceso que se repite o que progresa indefinidamente. Bajo esta significación, el infinito es, literalmente, lo que no tiene fin, lo que siempre (infinito temporal) se puede continuar. A este tipo de infinito lo llamamos infinito potencial, es el único infinito aceptado por Aristóteles y es el único infinito admitido en la ciencia hasta el siglo XIX. […] (Waldegg, 1996, p. 107)

Una mirada particular, que ha contribuido a la construcción del infinito matemático en diferentes contextos de la disciplina, considerando en su comprensión las cuestiones intuitivas, lo que se relaciona con una manera formal de abordar propuestas artísticas, donde la construcción de procesos iterativos gráficos se repite sin un fin aparente. Argumento factible de utilizar para el análisis de la representación del infinito en el arte utilizando la geometría Euclidiana e Hiperbólica cómo una forma

[1] Fue el joven matemático ruso Nikolai Lobachevski quien en 1826 finalmente se percató de que el quinto postulado no puede deducirse de las otras proposiciones fundamentales de la geometría y se atrevió a negar la "verdad evidente" de ese postulado de Euclides

de reconocer y comprender a través de la visualización y las construcciones geométricas, distintas concepciones espaciales, regidas por reglas diferentes.

Objetivos y métodos

La investigación destinada a analizar la relación geometría y arte desde una visión interdisciplinaria que asoció el concepto de infinito en el arte y su representación, permitiendo el análisis de los elementos dibujados, describiendo situaciones bajo un mismo patrón de referencia, aplicados a la partición del plano y la construcción de teselaciones. Para la representación geométrica se consideró la partición del plano mediante conceptos como simetrías, rotaciones, reflexiones y homotecias, que permiten la creación de figuras que se ensamblan disminuyendo o aumentando de tamaño como sucesiones recurrentes, prolongando el proceso hasta obtener infinitas figuras de la sucesión, rellenando una superficie finita con infinitos elementos formales.

Las herramientas utilizadas están previamente vinculadas con la comprensión de las geometrías indicadas, introduciendo las nociones básicas de los modelos en análisis, profundizando en algunos elementos y movimientos geométricos como en su representación en el plano, a fin de entender y articular las relaciones entre las distintas geometrías, aportando con una visión diferente y un reportorio visual que contribuye con referentes que facilitan el conocimiento de las geometrías Euclidiana e Hiperbólica.

Considerando lo esperado el estudio de casos resultó ser la estrategia metodológica más apropiada para la construcción, análisis y posterior comparación de la representación y geometrización de las aplicaciones artísticas. Para el proceso descriptivo se utilizó el *software* de geometría dinámica *Sketchpad*, herramienta técnica que permite la manipulación de objetos gráficos y la automatización de tareas repetitivas de diseño como son los recubrimientos en base a teselas insertas en un círculo donde el infinito potencial en la geometría Euclidiana se representa en su centro mientras en el modelo de Poincaré de la geometría Hiperbólica se instala en los bordes.

Discusión de resultados

Los resultados obtenidos fueron consecuencia de los casos analizados y corresponden a:

1.- Construcción de simetrías rotatorias con homotecia que corresponden a una representación de simetría cíclica, cuya imagen consta de un centro geométrico y de una circunferencia. Elementos que dan orden y estructuran promoviendo el pensamiento abstracto, características propias de la matemática y la geometría. En este caso, se observó que el teselado definido disminuye infinitamente a medida que se acerca al punto centro, representando el infinito o aumenta exponencialmente a medida que se aleja.

2.- Construcción de teselados en el plano hiperbólico utilizando el modelo del disco de Poincaré, donde las figuras que se acercan al borde del círculo se ven más lejos, luego de aparente menor tamaño, lo que corresponde al infinito.

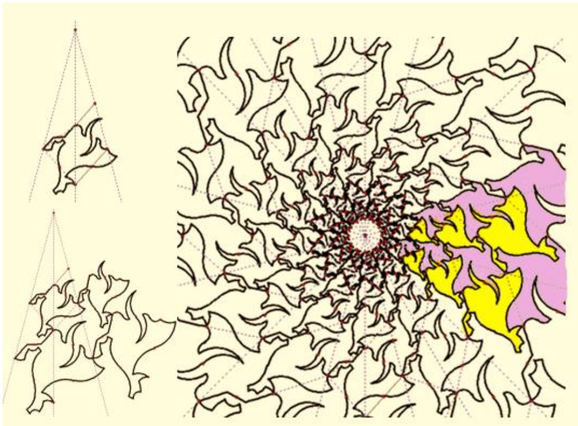

Fig. 1. Simetría rotatoria con homotecia. Fuente: Autoras, 2021

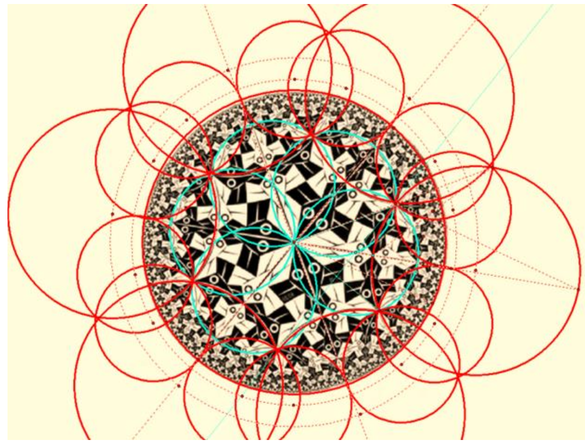

Fig. 2. Teselado Cicle I Escher. Fuente: Intervención autoras, 2021.

En la Geometría Euclidiana el concepto infinito se basa en la construcción de una simetría rotatoria con homotecia, generada a partir de un deltoide con simetría rotacional en este caso de orden diez y seis. Para su construcción se requiere construir el deltoide, aplicar la homotecia y finalmente rotar los elementos hasta completar los 360°, para lo cual se construyó una circunferencia y desde el centro se definieron ocho ángulos de 45° los que se bisecaron, dibujando en cada uno de ellos dos ángulos de 22,5°.

Para construir el deltoide se eligió una de las bisectrices y sobre ella se ubicaron dos puntos vértices de la figura en una posición arbitraria. Para definir los vértices faltantes se bisecó uno de los ángulos contiguo y se localizó el tercer vértice, que luego se reflejó con respecto al eje central definiendo el polígono de cuatro lados.

El segundo paso consistió en homologar el polígono, para lo cual fue necesario definir la razón de homotecia, para obtenerla se trazó una paralela a uno de los lados mayores del polígono (m) por el vértice más cercano al centro de la circunferencia del polígono, obteniendo el lado mayor (n) del polígono homologado de menor tamaño. La razón de homotecia para acercarse al centro fue n/m (y m/n para alejarse del centro) y el centro de la circunferencia fue en ambos casos el centro de homotecia, transformación que dio origen al segundo deltoide de tamaño semejante al anterior y que formó parte de la serie, proceso que se repitió indefinidamente.

El tercer y último paso consistió en seleccionar los deltoides definidos en el ítem anterior y rotarlos dieciséis veces en un ángulo de 22,5° o hasta completar los 360°, cuyo centro de rotación es el mismo que el centro de la circunferencia. Proceso que se visualiza en las siguientes imágen~~es~~:

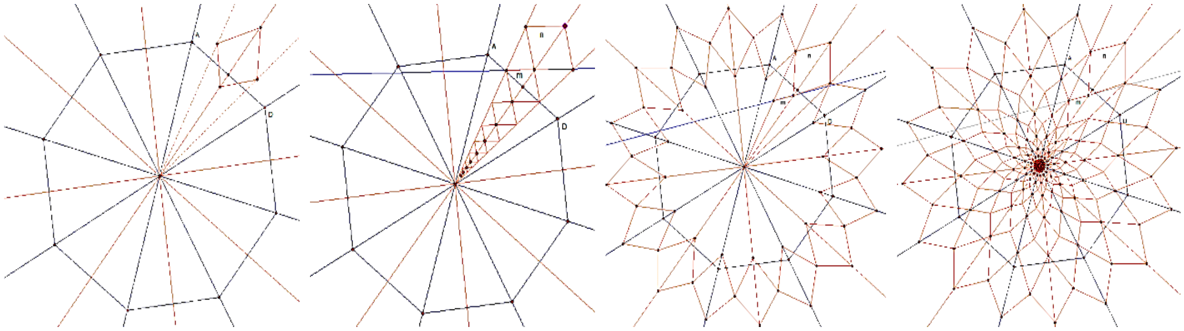

Fig. 3. Construcción de Simetría rotatoria con homotecia. Fuente; Elaboración propia, 2022.

Este tipo de cconstrucciones geométricas son factibles de observar en distintas propuestas artísticas, siendo probablemente la más conocida el grabado de la Plaza del Capitolio (Campidoglio) en Roma propuesto por Miguel Ángel, se trata de un espacio público del tipo plaza definido mediante un óvalo en el centro de un trapecio delimitado por tres palacios conformando un espacio central de tensión longitudinal, solución que Akerman (1997) destaca indicando "una figura estructurante que jerarquiza el centro donde habría de situarse la estatua, sin contrarrestar; no obstante, el eje longitudinal de la plaza y de la propia estatua" (149 - 150) valorando la creatividad y fundamentalmente la propuesta, que adaptándose al lugar releva las intenciones de generar un lugar que integra y relaciona las distintas edificaciones.

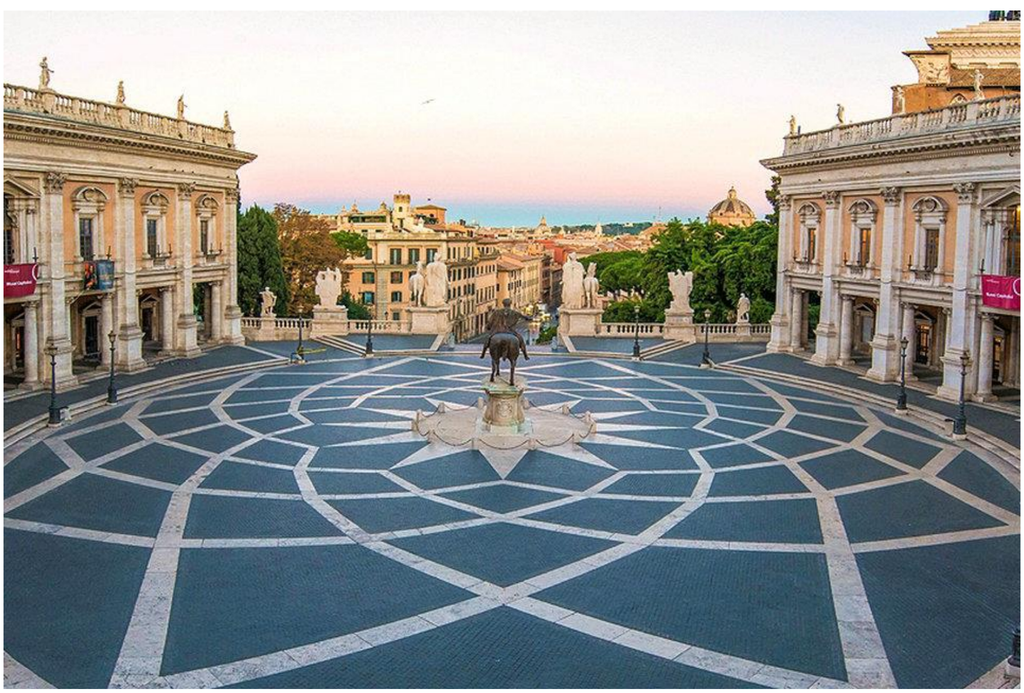

Fig. 4 Plaza del capitolio en Roma. Fuente imagen: https://www.hisour.com/wp-content/uploads/2020/06/Campidoglio-Square-Capitoline-Museums.jpg

El dibujo geométrico del pavimento actúa como una fuerza ordenadora que potencia la relación del espacio escultórico con su entorno, reforzando el carácter de eje central en torno al cual se instalan las edificaciones, destacando la presencia de la figura central. Situación que dota al lugar de protagonismo por su forma y dibujo rotacional, estableciendo una comunicación con el resto del conjunto mediante fuerzas centrífugas y centrípetas que entrega la composición.

También es posible encontrar este tipo de construcción geométrica en obras artísticas relacionadas con mosaicos y teselaciones, para lo cual se profundizó en algunas nociones y conceptos teóricos que permitieron comprender el proceso de elaboración de recubrimientos planos, generados por la construcción de simetrías rotatorias con dilatación sobre un círculo de radio ilimitado y su aplicación en el arte.

La base teórica a la que se recurrió fueron las transformaciones geométricas en el plano, cuyo significado en matemáticas es “correspondencia entre elementos de dos conjuntos”. Para Clemmens, O’Daffer y Cooney (1998) y Lehmann (1989) la palabra transformación significa el cambio de un objeto (relación, expresión o figura) el cual está sujeto a una ley que rige dicho cambio, luego para realizar una transformación es necesario un objeto y una regla u operación que indique o describa como debe cambiar el objeto. A la figura resultante se le denomina homóloga.

Según la forma que asuma el objeto homologado la transformación es una isometría o movimiento rígido si la forma inicial y final son congruentes o iguales, es una transformación isomorfa si la forma inicial y final son semejantes y es una transformación anamórfica si la forma final es distinta a la inicial (Rodríguez, 2010). De acuerdo con esta definición el estudio se basó en la transformación isomorfa, que construye formas semejantes mediante la transformación homotecia, donde intuitivamente dos polígonos presentan la misma forma, pero no el mismo tamaño.

Para la construcción de una simetría rotatoria con dilatación es necesario definir una tesela de encaje perfecto sobre la cual se aplica respecto del centro la transformación homotecia indefinidamente rotándola con un ángulo previamente definido que corresponde a un orden determinado que permita cubrir 360°. La secuencia de imágenes muestra la construcción de una figura o fragmento inscrito en un deltoide de orden doce, que da origen a una simetría rotacional con dilatación, que enseña una representación gráfica particular, organizada concéntricamente con simetría cíclica, y que cuenta con un centro geométrico que corresponde al centro del dibujo que otorga orden y estructura, características propias de la matemática y de la geometría.

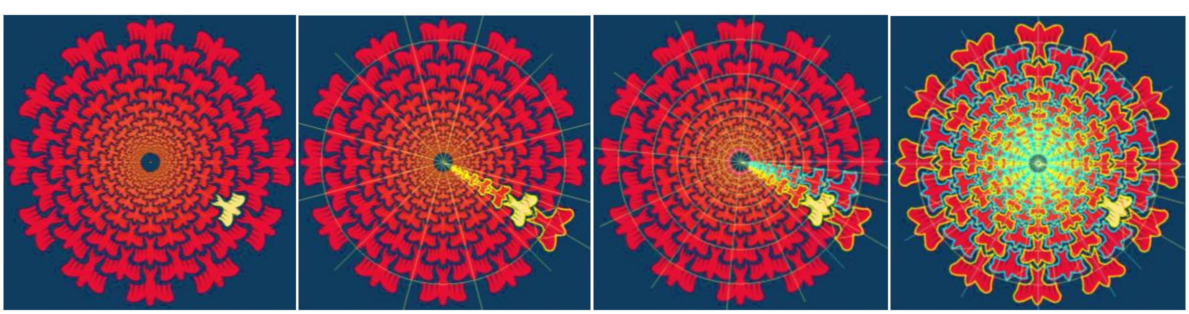

Fig. 5 Simetría rotatoria con dilatación. Fuente: Elaboración propia a partir de dibujo de C.Oto. 2022

Maurits Escher (1898-1972) fue un artista holandés que destacó por su producción en el "arte matemático", su trabajo hace referencia al recubrimiento completo de una superficie con un patrón de figuras sin dejar espacios y eliminando la sobre posición entre ellas. Representaciones en las que es posible observar la incorporación del concepto infinito, como se enseña a continuación.

En la secuencia de imágenes se observó la construcción de una tesela de orden cuatro creada por Escher, cuyo diseño basado en peces que se entrelazan en distintos sentidos generan un ensamble de piezas con simetrías y asimetrías, que dan origen a un patrón que se estructura mediante dos ejes que se cortan en 90° y que constituyen el centro y el ángulo de giro de las simetrías cíclicas, de radio menor al acercarse al centro y de radio mayor al alejarse de él, evidenciando el modo como la técnica crea la ilusión del concepto infinito a través de la disminución o crecimiento de la tesela.

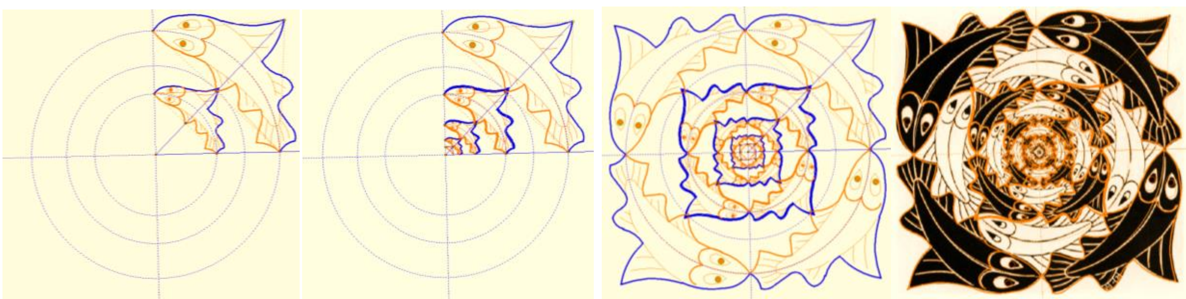

Fig. 6. Geometría aplicada en mosaico de M. C. Escher Circular Fish. Fuente: https://www.wikiart.org/es/m-c-escher desarrollado e intervenido por los autores, 2022

Fig. 7. Path of Life I y Path of Life II de M.C. Escher. Fuente: https://www.wikiart.org/es/m-c-escher/all-works#!#filterName:all-paintings-chronologically,resultType:masonry

En las obras Path of Life I de orden ocho con giros en 45° y Path of Life II de orden cuatro con giros en 90° Escher desarrolló el mismo principio con distintos órdenes y teselaciones, dejando de manifiesto la búsqueda y proceso creativo del autor.

Para Gombrich (1979) "en el proceso de producci6n del arte, es preciso considerar la presencia de un espacio propio del lenguaje como técnica para crear ilusión, que resulta expresivo en la libertad del artista y del contemplador" (p. 314).

El segundo caso analizado está referido a la construcción de teselados en otras curvaturas o geometrías no Euclidiana que corresponde a la geometría hiperbólica que utiliza el disco de Poincaré y su representación del infinito en el plano, cuya peculiaridad es que a medida que las figuras se acercan al borde del círculo las formas reducen su tamaño, aparentando estar más lejos, visualmente tendiendo al infinito.

El proceso de análisis consideró que la geometría hiperbólica se caracteriza por no cumplir el quinto postulado de Euclides, y solo utilizar los primeros cuatro postulados (Delgado Vásquez, 2004), postura que abre una nueva concepción espacial al sustituir el quinto postulado indicando que por punto exterior a una recta pasan infinitas rectas paralelas, y con ello una nueva representación geométrica en el plano. En este caso es el disco de Poincaré el utilizado como modelo de traducción de la geometría hiperbólica (H^2) y su relación con el plano Euclidiano (R^2) y junto con ello la comprensión y transformación de los distintos elementos en ambas geometrías.

Para el análisis se requirió de un acercamiento al modelo, siendo necesario precisar que el plano se representa por los puntos interiores del disco de Poincaré y las rectas del plano son arcos de circunferencia ortogonales al borde y a los diámetros de este. En este contexto y utilizando las herramientas de dibujo se materializaron las construcciones geométricas necesarias para resolver ciertos problemas o visualizar situaciones abstractas, la obra analizada fue Cicle I de Escher.

En la imagen se observó como a través de dos puntos A y B al interior del disco de Poincaré se traza una recta que en la geometría hiperbólica es un arco de circunferencia. Construcción realizada que se basó en tres pasos que consistieron en: definir los inversos[2] de los puntos A y B, obteniendo A' y B', posteriormente a través de una relación cruzada se construyeron dos segmentos uniendo el punto A con B' (inverso de B) y el punto B con A', para finalmente mediante la construcción de la mediatriz de cada segmento se determinó el centro de la circunferencia C cuyo radio CA o CB define el arco de circunferencia buscado que posteriormente se aplicó a la obra en estudio.

[2] La inversión es una transformación geométrica en que a un punto A del plano le corresponde otro punto A' del mismo plano, de tal forma que ambos puntos estén alineados con un punto fijo O denominado centro de inversión y que el producto de sus distancias OA x OA' tenga un valor constante K, denominado potencia de la inversión

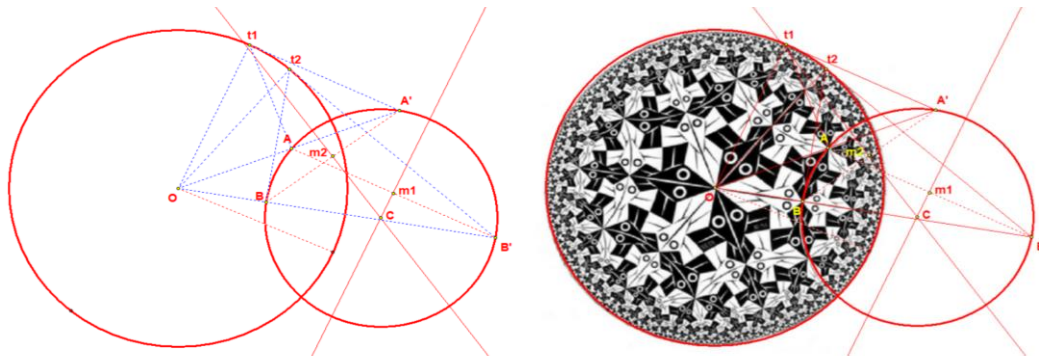

Fig. 8. Recta en la geometría hiperbólica y su aplicación en obra de M.C. Escher Cicle I. Fuente: https://www.wikiart.org/es/m-c-escher/circle-limit-i intervenida por las autoras, 2022

En la obra además se observó que el proceso se repite si se gira el arco de circunferencia de centro C en un ángulo de 60° con respecto al centro O, definiendo así el perímetro del teselado de mayor tamaño en el centro del disco, siendo los vértices que definen la forma los puntos de intersección de las circunferencias de centro C más cercanos al centro O. Tesela central basada en simetrías geométricas que definen un patrón repetitivo apoyado en triángulos que se rotan en 60° para obtener el recubrimiento central.

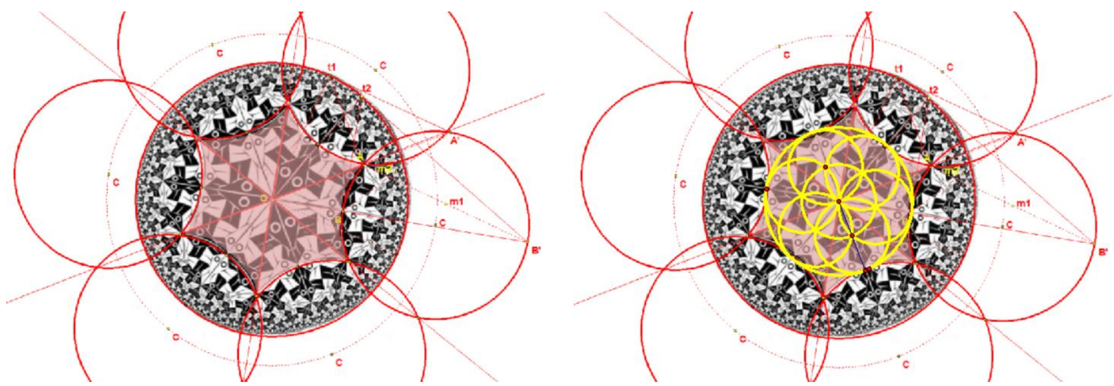

Fig. 9. Obra de M.C. Escher Cicle I. Fuente: https://www.wikiart.org/es/m-c-escher/circle-limit-i intervenida por las autoras, 2022

Otro de los aspectos analizado fue la ortogonalidad de los arcos de circunferencias con respecto al disco límite de centro O en un ángulo de 90°. Obteniendo en la construcción geométrica que los arcos que definen recta en la geometría hiperbólica si lo son. Luego como el caso de estudio presenta una simetría rotacional de nivel seis la nueva circunferencia ortogonal al disco límite, de radio menor se repite doce veces en torno al centro O, que se obtendrá mediante un giro en 30° para completar la obra.

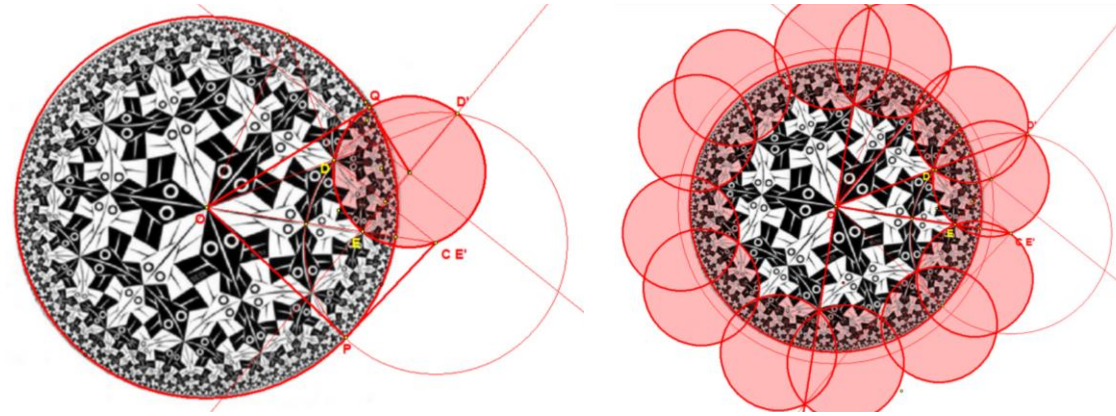

Fig. 10. Obra de M.C. Escher Cicle I. Fuente: https://www.wikiart.org/es/m-c-escher/circle-limit-i intervenida por las autoras.2022

Proceso que se repite para la construcción de circunferencias de radios menores que se acercan al borde del disco límite. Importante señalar que en este trabajo solo se revisaron nociones básicas para la comprensión de la geometría hiperbólica, profundizando gráficamente en la construcción de rectas, estableciendo a través del dibujo geométrico la ortogonalidad con el disco de Poincaré, sin embargo, queda abierta la posibilidad de seguir explorando en la construcción de este modelo.

Por otra parte, el acercamiento al concepto infinito potencial aplicado en el arte de las teselaciones a través de distintas concepciones geométricas enseña visiones diferentes del espacio y su representación, que nacen de cómo se concibe el quinto postulado, donde cada geometría se convierte en el estudio de las transformaciones que las caracteriza.

Conclusiones

Para concluir el trabajo y como reflexión final sobre el aporte de lo analizado indicar que profundizar en las geometrías Euclidiana e Hiperbólica permite ampliar la concepción de los elementos geométricos, lo que genera una visualización diferente del espacio, con características propias, pero tan válida una como la otra.

El uso de la geometría como herramienta para comprender reglas y operaciones matemáticas a fin de explorar distintos contextos geométricos y como la técnica precede a la obra del artista y hace visible todo aquello observable. En los casos revisados el artista al expresarse manifiesta un saber a través de un lenguaje estructurado, donde la gramática gráfica se basa en principios y técnicas que aporta la geometría, teoría y normas de dibujo.

El estudio evidenció que la geometría Euclidiana e Hiperbólica a través de polígonos regulares, interpretan el concepto infinito en el arte, donde cada geometría corresponde al estudio de propiedades que no cambian o preservan sus invariantes al aplicar un tipo de transformaciones, articulando mediante nociones básicas la correlación entre ellas (Arguello, 2017).

Metodológicamente es posible concluir que las herramientas que se usan para el análisis de las formas geométricas requieren de innumerables y precisas construcciones gráficas, por lo que muchas veces se desestiman antes de evaluar, la posibilidad de trabajar con programas de geometría dinámica es una condición necesaria para la exploración de las formas y su construcción.

Referencias bibliográficas:

Ackerman, J. (1997). *La arquitectura de Miguel Ángel*, Madrid, Celeste

Arguello Cruz, E. (2017). *Plano Hiperbólico y Aplicaciones, Proyecto de Investigación Facultad de Matemáticas*: Universidad de San Francisco de Quito, Quito.

Belmonte, J.L, y Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14 (2), 139-171

Clemens, S., O' Daffer, P., y Cooney, T. (1998). *Geometría*. México, D. F: Addison Wesley Logman.

Delgado Vásquez, J. (2004). *Introducción a la geometría hiperbólica*. Monografía para título de licenciado en matemática. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. https://docplayer.es/22623427-Introduccion-a-la-geometria-hiperbolica-jhon-fredy-delgado-vasquez.html

Franco, C. B. (2006). *Arte geométrico: Análisis y tendencias de su desarrollo plástico*. Tesis de doctorado. Universidad de Granada. España. https://digibug.ugr.es/handle/10481/929

Gombrich, E. (1979). *Arte e ilusión. Estudio sobre psicología de la representación pictórica*. Barcelona, Phaidon

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica*. México, D. F: Limusa

Pando, F. S. A. (2009). *El extraño mundo de las teselaciones. Un paseo por la geometría para estudiantes de bachillerato*. Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM. México. http://132.248.9.195/ptd2009/junio/0644147/0644147.pdf

Rodríguez, M. (2010). *Generación de teselaciones periódicas: Grupos Cristalográficos.* Madrid, España: Universidad Politécnica de Madrid.

Vallejo, F. L. (2011, Febrero). La matemática en el arte: su didáctica. *Revista Digital Ciencia y didáctica*. (50), 63- 83. file:///D:/mipallar/Downloads/CB%200525924-3469%20(2).pdf

Vicente, S. (2003). Arte y Ciencia: reflexiones en torno a sus relaciones. *Huellas*, (3), pp. 85-94. https://bdigital.uncu.edu.ar/objetos_digitales/174/vicenteHuellas3.pdf

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 1 (1)*, pp. 107-122.